



TITLE:

Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty + C$ on the polydisk

AUTHOR(S):

泉池, 敬司; 真次, 康夫

CITATION:

泉池, 敬司 ...[et al]. Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty + C$ on the polydisk. 数理解析研究所講究録 1993, 825: 18-31

ISSUE DATE:

1993-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83271>

RIGHT:

Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty + C$ on the polydisk

神奈川大工 泉池 敬司 (Keiji Iezuchi)

信州大 理 真次 康夫 (Yasuo Matsugu)

2次元 torus T^2 上 Z は $(H^\infty + C)(T^2) = H^\infty(T^2) + C(T^2)$ は $L^\infty(T^2)$ の closed subspace Z であるが, algebra にはならず。しかし単位円周 T 上 Z は $(H^\infty + C)(T)$ は $L^\infty(T)$ の closed subalgebra になる。又 Bourgain algebra に関して $H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$ であり $H^\infty(T)_b = (H^\infty + C)(T)_b = (H^\infty + C)(T)$ である。これは T と T^2 の持つ性質の差の一面である。そこで Z は、これらの差から生ずる次の問題について考える。

問題1. \mathcal{A} を $A(T^2)$ と $H^\infty(T^2)$ の間の closed subalgebra とする。 $\mathcal{A} + C(T^2)$ は closed subalgebra になるか?

問題2. $(H^\infty + C)(T^2)_b$ は何か?

いずれも, $(H^\infty + C)(T^2)$ の multiplier algebra \mathcal{M} がその中心的な役割を果たす。今後の課題として, \mathcal{M} についての corona 定理が成立するか等が残されてくる。

§1. Introduction

U^2 unit polydiskを表す。 $H^\infty(U^2)$ で有界な holomorphic 関数の空間とする。その境界関数 (T^2 上の)の空間を $H^2(T^2)$ と書く。 $C(T^2)$ は連続関数の空間である。Rudin [7] は $(H^\infty + C)(T^2)$ が $L^\infty(T^2)$ の closed subspace であるが, subalgebra にならないことを証明した。一方 Sarason [8] により $(H^\infty + C)(T)$ は $L^\infty(T)$ の closed subalgebra になることがよく知られている。そこで $(H^\infty + C)(T^2)$ の multiplier algebra を

$$\mathcal{M} = \{f \in L^\infty(T^2); f \cdot (H^\infty + C)(T^2) \subset (H^\infty + C)(T^2)\}$$

とする。 \mathcal{M} は $L^\infty(T^2)$ の closed subalgebra になる。§2 において, $\mathcal{M} \subset H^\infty(T^2)$ でありかつ \mathcal{M} を決定する。その事を使って問題1に答える。

次に Cima-Timoney [3] によ, 2 導入された Bourgain algebra の定義をする。 X を単位元を持つ可換 Banach 環とし, Y をその closed subspace とする。

$$Y_b = \{f \in X; \|ff_n + Y\| \rightarrow 0, \forall \{f_n\}_n \subset Y \text{ weakly null}\}$$

とする。彼らは Y_b が X の closed subalgebra になることを確かめ, Y_b を X に対する Y の Bourgain algebra と呼んだ。特に注意したいのは, Y が algebra である時は $Y \subset Y_b$ になるが, Y が algebra ではない時は Y_b がどの程度大きな空間になるのか全く予測できない所である。その後 Cima-Janson-

Yale [1] により $H^\infty(T)$ の $L^\infty(T)$ に對する Bourgain algebra は

$$H^\infty(T)_b = (H^\infty + C)(T)$$

であることが示された。これを契機に Bourgain algebra の研究が急速に広まった。Gorkin-Izuchi-Mortini [4] は

$$(H^\infty + C)(T)_b = (H^\infty + C)(T)$$

であることを示し、一般の Douglas algebra に對する Bourgain algebra を決定した。多次元上では Cima-Wogen (Izuchi [5]) は、

$$H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$$

であることを示し、[5] では単位球面上の B_n で

$$H^\infty(\partial B_n)_b = (H^\infty + C)(\partial B_n)$$

であることを示された。 $(H^\infty + C)(T)_b$ は T 上では Chang-Marshall の定理があるので決定できたが、 ∂B_n 上ではその定理にあたるものが知られていないので、 $(H^\infty + C)(\partial B_n)_b$ はまだ決定されずに残されている。一方内部に目を向けてみる。

$C^\infty(U)$ 上の有界連続関数の空間とする。 $H^\infty(U)$ の $C^\infty(U)$ に對する Bourgain algebra を考えることが出来る (境界と内部の Bourgain algebra の相互関係はまだはっきりしていない)。Cima-Stroethoff-Yale [2] 及び Izuchi-Stroethoff-Yale [6] は

$$H^\infty(U)_b = (H^\infty(U) + C(\bar{U}))_b = H^\infty(U) + C(\bar{U})$$

であることを示した。

以上は algebra の Bourgain algebra についての結果であるが, algebra ではない時で知られているのは次の Izuchi-Stroethoff-Yale [6] による結果である。 $H^\infty(U)$ を U 上の有界調和関数の空間とする。 $H^\infty(U)$ は algebra にはならない。その $C^\infty(U)$ に対する Bourgain algebra は, $VMO(T)$ 空間と関係して次の形になる,

$$H^\infty(U)_b = (VMO(T) \cap L^\infty(T))^\sim + C(\bar{U}),$$

ここで $^\sim$ は内部への harmonic extension を表す。

もう一度 Bourgain algebra Y_b の定義にもどってみる。 Y の X に対する multiplier algebra を考えることができる,

$$\mathcal{M}(Y) = \{f \in X; fY \subset Y\}.$$

すると $\mathcal{M}(Y) \subset Y_b \subset X$ であることは明らかであり, 又 Y_b が Y の multiplier の概念を少し広げたものであることが気づかれる。 Y_b は $fY \subset Y$ なる $f \in X$ の集まりであると考えられる。この意味からすると Bourgain algebra の研究は closed subspace に内在する algebra の研究と同一であると考えられる。又特に $\mathcal{M}(H^\infty(D)) = \mathbb{C}$ であることから, $H^\infty(D)_b$ の決定はそれなりに意味があることと見える。

さて $(H^\infty + C)(T^2)$ も algebra ではない, closed subspace

であった。§3において、その $L^\infty(T^2)$ に対する Bourgain algebra は

$$(H^\infty + C)(T^2)_b = \mathcal{M}_b = \mathcal{M}$$

となることを見る。

§4においては、 $C^\infty(U^2)$ に対する Bourgain algebra を考えよう。~ は Poisson 積分による内部への拡張を表すことにする。 $C_T(U^2)$ は $C(\bar{U}^2)$ の中の関数で T^2 上で 0 になるものとする。 $C_0(U^2) \subset C_T(U^2) \subset C(\bar{U}^2)$ である。その時、
 $(\tilde{\mathcal{M}})_b = (H^\infty(U^2) + C(\bar{U}^2))_b = (H^\infty(U^2) + C_T(U^2))_b = \tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2)$
 である。ここに高階の Bourgain algebra を $\Upsilon_{b(n+1)} = (\Upsilon_{b(n)})_b$ とする。興味ある結果として

$$(\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2))_{b(n+1)};$$

$$(\tilde{\mathcal{M}} + C_T(U^2))_{b(n)} = (\tilde{\mathcal{M}} + C_T(U^2))_{b(n+1)}$$

が得られる。

§5において、polydisk algebra $A(T^2)$ 及び $A(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra について述べる。

§2. multiplier algebra \mathcal{M}

$f \in L^\infty(T^2)$ に対して

$$I_{\sharp}(f)(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\psi}) e^{-ik\psi} d\psi/2\pi \quad \text{a.e. } e^{i\theta} \in T;$$

$$J_{\sharp}(f)(e^{i\psi}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\psi}) e^{-ik\theta} d\theta/2\pi \quad \text{a.e. } e^{i\psi} \in T$$

を定義することが出来る。 $\|I_k(f)\|_T \leq \|f\|_{T^2}$ である。又 $f \in H^0(T^2)$ である必要十分条件は $I_k(f) = J_k(f) = 0$ a.e. on T $\forall k < 0$ となる。特に $f \in H^0(T^2)$ とすると

$$(1) \quad \tilde{f}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) z^n, \quad (z, w) \in \square^2$$

と表せる。 $f_n(z), g_n(w) \in H^0(\square)$ であり、その境界関数は

$$f_n(e^{i\theta}) = I_n(f)(e^{i\theta}), \quad g_n(e^{i\psi}) = J_n(f)(e^{i\psi})$$

であることが容易に示せる。これを使って \mathcal{M} は次の様に特徴づけられる。

定理 2.1. $\mathcal{M} = \{f \in H^0(T^2); I_k(f), J_k(f) \in A(T) \quad \forall k \geq 0\}$.

上の定理を(1)の言葉でいいかえると、

$$\mathcal{M} = \{f \in H^0(T^2); f_n, g_n \in A(\square) \quad \forall k \geq 0\}$$

となる。 \mathcal{M} に入る関数の例としては、 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^0(\square)$ に対して $f(z, w) = h(zw)$ を考えればよい。

系 1. $f \in H^0(T^2)$ とする。 $f \in \mathcal{M}$ である必要十分条件は \tilde{f} が $\square^2 \setminus T^2$ へ連続に拡張出来ることである。

次に問題 1 について考える。 $f \in H^0(T^2)$ に対して、次の様に表すことも出来る

(2) $f(e^{i\theta}) = F_n(e^{i\theta}, e^{i\psi}) + e^{in(\theta+\psi)} G_n(e^{i\theta}, e^{i\psi})$,
 $\therefore F_n, G_n \in H^\infty(T^2)$ 且 $\hat{F}_n(i, j) = 0 \quad \forall i, j \geq n \geq 0$ である。
 $A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra \mathcal{A} が
 $*$ -invariant であるとは各 $f \in \mathcal{A}$ に対し $Z(z)$ の形に表した
 時, $G_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \geq 0$ の時にいうことにする (これは T 上の
 $*$ -invariant の自然な拡張である [8])。

系 2. \mathcal{M} は $*$ -invariant である。

Rudin [7] により $\mathcal{A} + C(T^2)$ は closed subspace になることは分る。

定理 2.2. $\mathcal{A} \in A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra とする。この時 $\mathcal{A} + C(T^2)$ が closed subalgebra になる必要十分条件は $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ であり, \mathcal{A} は $*$ -invariant になることである。

系 3. $\mathcal{M} + C(T^2)$ は closed subalgebra である。

§ 3. $(H^\infty + C)(T^2)$ の Bourgain algebra

定理 3.1. $(H^\infty + C)(T^2)_b = \mathcal{M}_b = \mathcal{M}$.

これを証明するのに、次の補題を使う。ここで $f \in H^\infty(T^2)$ に対して $\tilde{f}(z, w)$ は w を固定した時 z に関して $\tilde{f}(\cdot, w) \in H^\infty(D)$ であるから、その境界函数を $\tilde{f}(e^{i\theta}, w)$ で表す。

補題. $f \in H^\infty(T^2)$ が $I_k(f) \notin A(T)$ for some $k \geq 0$ とする。

その時、 $0 < r < 1$ に対して

$$\sup_{|w|=r} \|\tilde{f}(e^{i\theta}, w) + C(T)\|_T > r^k \|I_k(f) + C(T)\|_{T/2} \neq 0$$

である。

定理 3.1 の証明の一部。 $\mathcal{M}_b = \mathcal{M}$ となることだけを証明してやる。 \mathcal{M} は algebra であるから、 $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_b$ である。

$\mathcal{M} \subset H^\infty(T^2)$ であるから、[5] より $\mathcal{M}_b \subset H^\infty(T^2)$ である。

$\mathcal{M}_b \subset \mathcal{M}$ を示すために $f \in \mathcal{M}_b$ とする。 $f \notin \mathcal{M}$ と仮定する。

定理 2.1 よりある $k \geq 0$ に対して $I_k(f) \notin A(T)$ と考えてよい。

補題より次をみたす列 $\{w_n\}_n \subset D$ が取れる、

(3) $|w_n| \rightarrow 1$;

(4) $\|\tilde{f}(e^{i\theta}, w_n) + C(T)\|_T > \|I_k(f) + C(T)\|_{T/3} \neq 0$.

(3) より $A(T)$ の中の weakly null sequence $\{f_n(e^{i\theta})\}_n$ に対して

$\tilde{f}_n(w_n) = 1$ なるものが存在する。 $A(T) \subset H^\infty(T^2)$ と考える

ことができ、 h_n は \mathcal{M} の weakly null sequence となる。す

ると $h \in \mathcal{M}$ に対し

$$\|fh_n(e^{i\theta}) + h\|_{T^2} \geq \sup_{|z| < 1} |\tilde{f}(z, w_n) \tilde{h}_n(w_n) + \tilde{h}(z, w_n)|$$

$$\geq \| \tilde{f}(e^{i\theta}, w_n) + A(T) \|_T$$

$$> \|I_A(f) + C(T)\|_T / 3 \quad \text{by (4)}$$

となり、 $\|fh_n + h\|_{T^2} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ である。よ、 z

$f \notin \mathcal{M}_b$ となり矛盾が生ずる。

承るより $\mathcal{M} + C(T^2)$ は closed subalgebra になるが、
 $(\mathcal{M} + C(T^2))_b = \mathcal{M} + C(T^2)$ となるかどうか分らない。
 その原因は T^2 上でもやはり Chang-Marshall の定理にあたる結
 果が知られていない所にある。

§4. $C^\infty(U^2)$ に対する Bourgain algebra について

\mathcal{M} 及び $H^\infty(T^2)$ の T^2 上の Bourgain algebra の結果を使
 うと、比較的容易に次を示すことができる。

定理4.1. (i) $(\tilde{\mathcal{M}})_b = \tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2)$.

(ii) $H^\infty(U^2)_b = (H^\infty + C_0)(U^2)$.

次に $(\tilde{\mathcal{M}})_{bb} = (\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2))_b$ 及び $H^\infty(U^2)_{bb} = (H^\infty +$

$C_0(U^2)$ を決定しようということになる。ここからの話しは $\partial U^2 \setminus T^2$ における関数の挙動が関係してくる。系 1 より, H^∞ の関数は $\partial U^2 \setminus T^2$ で連続 (= 拡張できる) であるが (関数があまり多くないということ), $H^\infty(U^2)$ は複雑に動いている (関数が多くあるということ)。ここが以下の結果の形が異なるものに対する大もとである。

定理 4.2. $n \geq 1$ に対して,

$$H^\infty(U^2)_{b(n)} = (H^\infty + C_0)(U^2)_{b(n)} = (H^\infty + C_0)(U^2).$$

$(H^\infty + C_0)(U^2)$ は algebra であるから, その Bourgain algebra は $(H^\infty + C_0)(U^2)$ より大きくなるが, 本当に大きくなり得ないのは, $H^\infty(U^2)$ が多くの関数を含み, かつ種々の weakly null sequence を作ることが可能であるためである。

さて,

$$C_{T^2}(\bar{U}^2) = \{f \in C(\bar{U}^2); f = 0 \text{ on } T^2\}$$

があり, $C_0(U^2) \subset C_{T^2}(\bar{U}^2) \subset C(\bar{U}^2)$ である。 $(H^\infty + C_0)(U^2)$ は algebra になるが, $H^\infty(U^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2)$ 及び $H^\infty(U^2) + C(\bar{U}^2)$ は algebra ではない $C^0(U^2)$ の closed subspace である。そしてこの境界関数は

$$(5) \quad (H^\infty + C_0)(U^2)|_{T^2} = H^\infty(T^2);$$

$$(6) \quad (H^\infty(U^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))|_{T^2} = H^\infty(T^2);$$

$$(7) \quad (H^\infty(U^2) + C(\bar{U}^2))|_{T^2} = (H^\infty + C)(T^2)$$

である。上の様な差があるにもかかわらず、次が成立する。

定理 4.3.

$$(H^\infty(U^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = (H^\infty(U^2) + C(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2).$$

$(H^\infty(U^2) + C(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2)$ の方は定理 3.1 及び 4.1 を見ると納得しやすい。しかし定理 4.2, (5), (6) から見た時, $(H^\infty(U^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2)$ となるのは想像するのが難しい。そこで, $f \in H^\infty(U^2) \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ とする。系 1 より f は $\partial \bar{U}^2 \setminus T^2$ のある点で連続に拡張できない。その性質を用いて $C_{T^2}(\bar{U}^2)$ の中にうまく weakly null sequence を見つけて $f \notin (H^\infty(U^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$ を示せる。

さて最後に残されてくるのが, $\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2)$, $\tilde{\mathcal{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2)$, $\tilde{\mathcal{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra の決定である。 $\tilde{\mathcal{M}} + C(\bar{U}^2)|_{T^2} = \mathcal{M} + C(T^2)$ であるから $\tilde{\mathcal{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra は決定されていらないから, $\tilde{\mathcal{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra は決定されずに残る。前の 2 つについて考える。

$$\text{定理 4.4. (i) } (\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2))_{b(n+1)}.$$

$$(ii) \quad (\tilde{\mathcal{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} = (\tilde{\mathcal{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b \\ \neq \tilde{\mathcal{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2).$$

$(\tilde{\mathcal{M}} + C_0(\bar{U}^2))_{b(n)}$ 及び $(\tilde{\mathcal{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$ を具体的に記述することができるが、記号が複雑になるのでここでは述べない。[5]において、任意の $A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra \mathcal{A} に対して、 $L^\infty(T^2)$ に對する Bourgain algebra に関して $\mathcal{A}_{bb} = \mathcal{A}_b$ かという問題が出されていいるが(まだ未解決)、定理 4.1 と 4.4 より同じ種類の問題を $A(\bar{U}^2)$ と $H^\infty(\bar{U}^2)$ の間に考えると、 $\tilde{\mathcal{M}}$ はその反例を与える。

§ 5. Polydisk algebra の Bourgain algebra

X を $L^\infty(T^2)$ の maximal ideal space とする。 $L^\infty(T^2) = C(X)$ と考えらる。 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in T^2$ に對する fiber を

$$X_\lambda = \{x \in X; z(x) = \lambda_1, w(x) = \lambda_2\}$$

とする。 $f \in L^\infty(T^2)$ に對して

$$\omega_0(f, \lambda) = \sup \{|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)|; \lambda_1, \lambda_2 \in X_\lambda\}$$

とする。 $V(T^2)$ を $\forall \varepsilon > 0$ に對して $\{\lambda \in T^2; \omega_0(f, \lambda) > \varepsilon\}$ が有限集合となる $f \in L^\infty(T^2)$ よりなる空間とする。 [5]で

$$A(T^2)_{b(n)} = (H^\infty \cap V)(T^2)$$

となることが示されている。 ここで $(H^\infty \cap V)(T^2) \subset \tilde{\mathcal{M}}$ であ

る。 $A(\bar{U}^2)$ の $C^\infty(U^2)$ に併する Bourgain algebra を考えるとき \tilde{H}^∞ の時と様子が少し異なる。定理 4.4 と比較するとおもしろい。

定理 5.1.

$$(i) \quad A(\bar{U}^2)_b = ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim)_b = (H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_0(U^2).$$

$$(ii) \quad A(\bar{U}^2)_{b(n)} \neq A(\bar{U}^2)_{b(n+1)}.$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad & ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} \\ &= ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b \\ &\neq ((H^\infty \wedge V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2)). \end{aligned}$$

$$(iv) \quad (A(\bar{U}^2) + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (A(\bar{U}^2) + C_0(U^2))_{b(n+1)}.$$

$$(v) \quad (A(\bar{U}^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} \neq (A(\bar{U}^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n+1)}.$$

それぞれの Bourgain algebra を記述することが出来る。

参考文献

1. J. Cima, S. Janson and K. Yale, Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 121-125.
2. J. Cima, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras on the unit disk, to appear in Pacific J. Math.

3. J. Cima and R. Timoney, The Dunford-Pettis property for certain planar uniform algebras, Michigan Math. J. 34(1987), 99 - 104.
4. P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Canad. J. Math. 44(1992), 797 - 804.
5. K. Izuchi, Bourgain algebras of the disk, polydisk, and ball algebras, Duke Math. J. 66(1992), 503 - 519.
6. K. Izuchi, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras of spaces of harmonic functions, preprint.
7. W. Rudin, Spaces of type $H^\infty + C$, Ann. Inst. Fourier Grenoble 25(1975), 99 - 125.
8. D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973), 286 - 299.